Algebra III - vse naloge z izpitnih rokov

Grupe in podgrupe.

1. Dana je množica $G = \{x + y\sqrt{5} \mid x^2 - 5y^2 = 1,\, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Pokaži, da je $(G, \cdot)$ grupa, kjer je $\cdot$ običajno množenje realnih števil. Ali je grupa G abelska?

2. Naj bo G grupa in $a, b, c \in G$ elementi grupe G, za katere velja $a \cdot b \cdot c = e$, kjer je e enota grupe G. Pokaži, da potem velja tudi $b \cdot c \cdot a = e$.

3. Dana je množica $G = \{2x + 3y \mid x - 3y = 0,\, x, y \in \mathbb{Z}\}$.
(a.) Pokaži, da je $(G, +)$ grupa, kjer je $+$ običajno seštevanje celih števil.
(b.) Dana je podgrupa $H = \{2x + 3y \mid x - 3y = 0,\, y = 2k,\ x, k \in \mathbb{Z}\}$ grupe G. Napiši Cayley-evo tabelo za G/H.

4. Dana je množica $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ kje so f_1, f_2, f_3 in f_4 preslikave definirane z

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = -x, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Pokaži, da je $(G, \circ)$ grupa, kjer je $\circ$ označuje običajno komponiranje funkcij.

5. Dani sta množici $H_0 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,|\, a + b + c + d = 0\}$ in $H_1 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,|\, a + b + c + d = 1\}$. Preveri, ali množici H_0 in H_1 tvorita grupi glede na operacijo seštevanja matrik. Odgovore utemeljite!

6. Naj bo X neprazna množica. Potenčno množico $\mathcal{P}(X)$ opremimo z operacijo $\backslash$ (razlika množic)

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} := \{x \,|\, x \in \mathcal{A} \ \text{in} \ x \notin \mathcal{B}\}, \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}(X).$$

Ali je množica $\mathcal{P}(X)$ zaprta glede na operacijo $\backslash$? Ali je operacija $\backslash$ asociativna na množici $\mathcal{P}(X)$? Odgovor utemelji!

Ciklične grupe.

7. Za vse podgrupe reda 8 v grupi $\mathbb{Z}_{32}$ napiši vse njihove generatorje.

8. Katere od naslednjih trditev so pravilne? Odgovore utemelji!
(a) Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementi poljubne grupe G. Potem velja

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

(b) Vsaka grupa reda 79 je ciklična.
(c) Grupa $\mathbf{Z}_{35}$ ima 24 generatorjev.
(d) Grupa G z enoto e, v kateri velja $x^2 = e$ za vsak $x \in G$, je abelska.

9. Naj bo G ciklična grupa generirana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Kateri so preostali elementi grupe G? Svojo trditev obrazložite.
(b) Zapiši Cayley-evo tabelo za grupo G.
(c) Ali je G abelska grupa?
(c) Napišite vse generatorje grupe G.

10. Naj bosta H in K končni podgrupi grupe G, ter da je $\gcd(|H|, |K|)$ praštevilo. Pokaži da je $H \cap K$ ciklična grupa.

11. Določi vse elemente reda 9 v grupi $\mathbb{Z}_{108}$. Za vse podgrupe reda 9 v grupi $\mathbb{Z}_{108}$ napiši vse njihove generatorje.

Permutacijske grupe.

12. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ elementa simetrične grupe S_8.
(a) Napiši α, β in $\alpha\beta$ kot produkt disjunktnih ciklov.
(b) Napiši α, β in $\alpha\beta$ kot produkt 2-ciklov (kot produkt transpozicij).
(c) Določi α^{-2}.

13. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
(a) Napiši α, β in $\alpha\beta$ kot produkt 2-ciklov (kot produkt transpozicij).
(b) Določi red permutacij α in β.
(c) Določi α^{-3}.

14. Naj bosta $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ in $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Napiši $\alpha\beta$ in $\beta^2\alpha$ kot produkt disjunktnih ciklov.

(b) Napiši $\alpha\beta$ in $\beta^2\alpha$ kot produkt 2-ciklov (torej kot produkt transpozicij).

(c) Določi α^{-1}, β^{-1} in $(\alpha\beta)^{456}$.

15. Naj bo $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 8 & 4 & 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Izračunaj π^{-1}, π^{2017} in $\pi^{-2}\pi^4$. Napiši $\pi^{-2}\pi^4$ kot produkt 2-ciklov (torej kot produkt transpozicij).

Izomorfizmi grup.

16. Naj bo $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ in $H = \mathbb{Z}_9$. Ali je $G \cong H$? Odgovor utemelji!

17. Naj bo $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ in $H = \mathbb{Z}_6$. Ali je $G \cong H$? Odgovor utemeljite!

18. Poišči grupo permutacij, ki je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$. Napiši Cayleyevo tabelo za $\mathbb{Z}_4$ ter za dobljeno grupo permutacij.

Odseki in Lagrangeov izrek.

19. Napiši vse leve odseke podgrupe $\langle(1432)\rangle$ v grupi S_4.

20. Poišči vse leve odseke podgrupe H v grupi G, če je:
(a) $G = \mathbb{Z}_{24}$ in $H = \langle 4\rangle$.
(b) $G = S_3$ in $H = \langle(23)\rangle$.

21. Naj bo S_4 simetrična grupa reda 4!.
(a) Določite podgrupo grupe S_4, ki vsebuje 6 elementov.
(b) Koliko podgrup reda 6 obstaja v grupi S_4?
(c) Če je $H = \langle(12),(13)\rangle$, določite vse leve odseke podgrupe H v grupi S_4.

22. Naj bo G dana grupa in naj bo $|G| = 8$. Pokaži, da mora G vsebovati element reda 2.

Direktni produkt grup.

23. Množica $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ tvori grupo glede na operacijo seštevanja.
(a) Napiši Cayley-evo tabelo grupe G.
(b) Za vse podgrupe reda 4 v grupi G napiši vse njihove generatorje.
(c) Poišči vse leve odseke podgrupe $H = \langle(1,1)\rangle$ v grupi G.

24. Določi število elementov reda 12 v grupi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times U(9)$.

Podgrupe edinke. Kvocientne grupe.

25. Naj bo $U(20) = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 20,\ \gcd(i,20) = 1\}$. Vemo, da je $U(20)$ grupa za množenje po modulu 20. Naj bo $H = \langle 9\rangle$ ciklična podgrupa grupe $U(20)$, generirana z 9.
(a.) Poišči vse desne odseke podgrupe H v grupi $U(20)$.
(b.) Napiši Cayley-evo tabelo za $U(20)/H$.
(c.) Poišči vse podgrupe grupe $U(20)/H$.

26. (a) Dana je grupa $G = \{1,8,12,14,18,21,27,31,34,38,44,47,51,53,57,64\}$ za operacijo množenja po modulu 65, in naj bo $H = \langle 12\rangle$ podgrupa grupe G. Napiši Cayley-evo tabelo za G/H.

(b) Določi red elementa $8\langle 16\rangle$ v grupi $U(105)/\langle 16\rangle$.

Homomorfizmi grup.

27. Dana je grupa $G = \{1,2,...,12\}$ z operacijo množenja po modulu 13. Določi vse homomorfizme iz grupe G v grupo $(\mathbb{Z}_6,+)$.

28. Dani sta grupi $(\mathbb{Z}_9,+)$ in $(\mathbb{Z}_3,+)$. Poišči vse homomorfizme iz grupe $\mathbb{Z}_9$ v grupo $\mathbb{Z}_3$.

29. Naj bo $U(10) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 10,\ \gcd(k,10) = 1\}$. Vemo, da je $U(10)$ grupa za množenje po modulu 10.

(a) Določi vse edinke grupe $U(10)$.

(b) Izračunaj center grupe $U(10)$.

(c) Določi vse homomorfizme iz grupe $U(10)$ v grupo $(\mathbb{Z}_8, +)$.

30. Določi vse homomorfizme iz grupe $\mathbb{Z}_4$ v grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

31. Uporabi prvi izrek o izomorfizmu, in pokaži, da je $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\langle(2,7)\rangle \cong \mathbb{Z}$.

Delovanje grupe na množici.

32. Naj bo G grupa realnih števil z operacijo seštevanja $(\mathbb{R}, +)$. Za $r \in G$ ter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definirajmo $r * (x, y) = (x + ry, y)$. Naj bo T poljubna točka v ravnini.

(a.) Pokaži, da je preslikava $* : G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ delovanje grupe G na množici $\mathbb{R}^2$.

(b) Geometrijsko opiši orbito, ki vsebuje točko T.

(c) Poišči stabilizator G_T.

(d) Če je $H = \{(1, 2), (2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, določi $5 + G_H$.

33. Naj bo G podgrupa grupe S_8, generirana z elementoma $(123)(45)$ in (78). Potem G kot grupa permutacij deluje na množici $X = \{1, 2, ..., 8\}$. Poišči orbito in stabilizator vseh elementov množice X.

34. Naj bo G poljubna grupa, ki deluje na neki množici X. Predpostavimo, da je pri tem delovanju 6 orbit. Naj bo $H \leq G$ in naj bo $[G : H] = 3$. Koliko orbit ima lahko delovanje podgrupe H na množici X?

35. Za vsako od naslednjih delovanj grupe G na množici X, opiši orbito in stabilizator danega elementa $x \in X$.

(a) $X =$ kvadrat, $G = \mathrm{Sym}(X)$ in $x =$ ogljišče kvadrata.

(b) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$ in $x = 4$.

(c) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ in $x = (1, 2)^\top$.

36. Naj bo D_6 diederska grupa reda 6. Grupa D_6 deluje na množici $X = \{A, B, C\}$ ogljišč enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$. Določite orbito in stabilizator vsakega elementa iz množice X glede na delovanje grupe D_6.

37. Dan je pravilni petkotnik katerega, ogljišča so označena s števili 1, 2, 3, 4 in 5. Naj bo G grupa vseh simetrij pravilnega petokotnika 12345 in naj bo $H = G_1$ (H je stabilizator ogljišča 1 v grupi G).

(a) Določi element $\alpha \in G$ za katerega je $\alpha(1) = 4$. Poišči orbito ogljišča 1 glede na grupo G.

(b) Določi element $\beta \in H$ za katerega je $\beta(2) = 5$. Poišči orbito ogljišča 2 glede na grupo H.

(c) Ispiši vse elemente stabilizatora H_2.

(d) Uporabi orbita-stabilizator izrek in dokaži, da je $|G| = 10$.

38. Naj bo $\mathcal{O}$ grupa vseh simetrij kocke (rotacija, zrcaljenje, drsno zrcaljenje,...). Grupa $\mathcal{O}$ deluje na množici $\{v_1, v_2, ..., v_8\}$ ogljišč kocke. Določi stabilizator ogljišča v_1 v grupi $\mathcal{O}$. Uporabi orbita-stabilizator izrek in dokaži, da je $|\mathcal{O}| = 48$.

Center. Normalizator elementa.

39. Množica $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja, in njena Cayley-eva tabela je dana na desni strani.

(a.) Določi vse edinke grupe G.

(b.) Izračunaj center grupe G.

(c.) Izračunaj normalizator ter centralizator elementov j in $-k$.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

$\circ$	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	e	c	g	b	f	1	d
b	b	c	f	1	e	g	d	a
c	c	g	1	a	f	d	b	e
d	d	b	e	f	a	c	g	1
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	1	d	b	g	a	e	c
g	g	d	a	e	1	b	c	f

40. Množica $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g\}$ tvori grupo glede na binarno operacijo $\circ$. Njena Cayley-eva tabela je dana na levi strani.

(a) Določi vse ciklične podgrupe grupe G. Za vsako ciklično podgrupo napiši vse njene generatorje.

(b) Za vsak $x \in G$ izračunaj $|x|$. Odgovor obrazloži!

(c.) Izračunaj center grupe G.

(d.) Izračunaj normalizator ter centralizator elementov a in g.

Izreki Sylowa.

41. Poišči vse Sylowe 2-podgrupe grupe D_{10} (diederska grupa vseh simetrij pravilnega 10-kotnika glede na operacijo kompozicije).

42. Pokaži, da grupa G reda 992 ne more biti enostavna.

43. Množica $G = \{I, A, B, AB, BA, ABA\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja, in njena Cayley-eva tabela je podana na desni strani. Določite vse Sylowe 2-podgrupe grupe G ter vse Sylowe 3-podgrupe grupe G.

	I	A	B	AB	BA	ABA
I	I	A	B	AB	BA	ABA
A	A	I	AB	B	ABA	BA
B	B	BA	I	ABA	A	AB
AB	AB	ABA	A	BA	I	B
BA	BA	B	ABA	I	AB	A
ABA	ABA	AB	BA	A	B	I

44. Poišči mogoče število Sylowih 3-podgrup in Sylowih 7-podgrup v grupi reda 3087.

Rešitve.

1. $(x_1 + y_1\sqrt{5})(x_2 + y_2\sqrt{5}) = (x_1x_2 + 5y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{5}$,
$(x_1x_2 + 5y_1y_2)^2 - 5(x_1y_2 + y_1x_2)^2 = 1$, $1 = 1 + 0\sqrt{5} \in G$, $(x + y\sqrt{5})^{-1} = x - y\sqrt{5} \in G$.

2. $abc = e$, $bc = a^{-1}$, $bca = e$.

3. (a.) $(2x_1 + 3y_1) + (2x_2 + 3y_2) = 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)$, $(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0$, $0 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0$, $(2x + 3y) + (2(-x) + 3(-y)) = 0$. (b.)
$G = \{..., -45, -36, -27, -18, -9, 0, 9, 18, 27, 36, 45, ...\}$, $H = \{..., -36, -18, 0, 18, 36, ...\}$

$+$	H	$9+H$
H	H	$9+H$
$9+H$	$9+H$	H

4.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

5. $H_0 : (a+a_1)+(b+b_1)+(c+c_1)+(d+d_1)=0$ je zaprta; je asociativna; identiteta je $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{bmatrix}$ je inverz za $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$; H_0 je grupa. H_1 ni grupa (ni zaprta), npr. $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \in H_1$ ampak $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \notin H_1$.

6. je zaprta, ni asociativna. Npr. če je $\mathcal{A} := \{a\} \subset \mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{B} := \emptyset \subset \mathcal{P}(X)$ potem $(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B})\backslash\mathcal{A} = \emptyset$, $\mathcal{A}\backslash(\mathcal{B}\backslash\mathcal{A}) = \mathcal{A}$...

7. $|\langle 16\rangle| = 2$, $|\langle 8\rangle| = |\langle 24\rangle| = 4$, $|\langle 4\rangle| = |\langle 12\rangle| = |\langle 20\rangle| = |\langle 28\rangle| = 8$.

8. (a.) $(x_1x_2...x_n)(x_yx_2...x_n)^{-1} = e$, $(x_1x_2...x_n)(x_n^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}) = e$. (b.) Naj bo $|G| = 79$. Potem $\forall a \in G$, $a \neq e$, $\langle a\rangle = G$. (c.) Da. ($\langle 0\rangle \neq G$, $\langle 5\rangle \neq G$, $\langle 7\rangle \neq G$,...) (d.) $(xy)^2 = e$, $xyxy = e$, $x^2yxy = x$, $yxy = x$, $xy = yx$.

9. (a) $A = \begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$, $A^6 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = I$. (b)

	I	A	A^2	A^3	A^4	A^5
I	I	A	A^2	A^3	A^4	A^5
A	A	A^2	A^3	A^4	A^5	I
A^2	A^2	A^3	A^4	A^5	I	A
A^3	A^3	A^4	A^5	I	A	A^2
A^4	A^4	A^5	I	A	A^2	A^3
A^5	A^5	I	A	A^2	A^3	A^4

(c) Da. (d) $G = \langle A\rangle$, $G = \langle A^5\rangle$.

10. $H \cap K$ je podgrupa grupe G. Če je $k = |H \cap K|$ potem k deli $|H|$ in k deli $|K|$. Če k deli $\gcd(|H|, |K|) \Rightarrow k = 1$ ali k je praštevilo...

11. Uporabi izrek: Za vsak pozitiven delitelj k števila n, je množica $\langle n/k\rangle$ podgrupa grupe $\mathbb{Z}_n$ reda k. Poleg tega, te podgrupe so edine podgrupe grupe $\mathbb{Z}_n$; ali izrek za število elementov reda d v ciklični grupi: Če je d pozitivno celo število ki deli n, potem je število elementov reda d v ciklični grupi reda n eneko $\phi(d)$; ali fundamentalni izrek za ciklične grupe...
$|12| = |24| = |48| = |60| = |84| = |96| = 9$.

12. (a.) $\alpha = (12345)(678)$, $\beta = (23847)(56)$, $\alpha\beta = (12485736)$. (b.) $\alpha = (15)(14)(13)(12)(68)(67)$, $\beta = (27)(24)(28)(23)(56)$, $\alpha\beta = (16)(13)(17)(15)(18)(14)(12)$. (c.) $\alpha^{-2} = (14253)(678)$.

13. (a) $\alpha = (12)(45)$, $\beta = (12)(13)(15)(16)$, $\alpha\beta = (13)(15)(14)(16)$. (b) $\alpha^2 = id$, $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 5$. (c) $\alpha^{-3} = (12)(45)$.

14. (a) $\alpha\beta = (364758)$, $\beta^2 = (178)(234)$, $\beta^2\alpha = (1376)(245)$. (b) $\alpha\beta = (38)(35)(37)(34)(36)$, $\beta^2\alpha = (16)(17)(13)(25)(24)$. (d) $\alpha^{-1} = (132)(45)(678)$, $\beta^{-1} = (128473)(56)$, $(\alpha\beta)^6 = \mathrm{id}$, $(\alpha\beta)^{456} = \mathrm{id}$.

15. $\pi = (179)(2364)(58)$, $\pi^{-1} = (971)(4632)(58)$, $|\pi| = \mathrm{lcm}(3,4,2) = 12$, $\pi^{12} = \mathrm{id}$, $\pi^{2017} = \pi$, $\pi^{-2}\pi^4 = \pi^2 = (17)(19)(26)(34)$.

16. $G \ncong H$, $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ $|(a,b)| \leq 3$.

17. $G = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$;

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)
(0,2)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)
(1,2)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)

; $H = \{0,1,2,3,4,5\}$;

	0	2	4	3	5	1
0	0	2	4	3	5	1
2	2	4	0	5	1	3
4	4	0	2	1	3	5
3	3	5	1	0	2	4
5	5	1	3	2	4	0
1	1	3	5	4	0	2

;

Da, $G \cong H$, $\varphi : G \longrightarrow H$ je izomorfizem, kje $\varphi(0,0) = 0$, $\varphi(0,1) = 2$, $\varphi(0,2) = 4$, $\varphi(1,0) = 3$, $\varphi(1,1) = 5$ in $\varphi(1,2) = 1$...

18. $T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$...

19. $\mathrm{id}H$, $(12)H$, $(13)H$, $(14)H$, $(23)H$ in $(34)H$.

20. (a.) $H = \{0,4,8,12,16,20\}$, $1 + H = \{1,5,9,13,17,21\}$, $2 + H = \{2,6,10,14,18,22\}$, $3 + H = \{3,7,11,15,19,23\}$. (b.) $H = (23)H = \{\mathrm{id}, (23)\}$, $(12)H = (123)H = \{(12), (123)\}$, $(13)H = (132)H = \{(13), (132)\}$.

21. (a) $S_3 \leq S_4$, $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. (b) Obstajajo 4 grupe reda 6. (c) $H = S_3$. Levi odseki so: $(1)H$, $(14)H$, $(24)H$, $(34)H$.

22. Uporabi Lagrange-ov izrek. Če je $a \in G$ potem $|a|$ deli $|G|$. Če je $|a| = 2$ potem... Če je $|a| = 4$ potem $a^2 \cdot a^2 = e$... Če je $|a| = 8$ potem $a^4 \cdot a^4 = e$...

23. (a)

+	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)	(2,1)	(2,0)	(3,1)	(3,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(2,1)	(2,0)	(3,1)	(3,0)	(0,1)	(0,0)
(2,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(2,1)	(2,1)	(2,0)	(3,1)	(3,0)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(3,0)	(3,0)	(3,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
(3,1)	(3,1)	(3,0)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)	(2,1)	(2,0)

(b) $\langle (1,0) \rangle = \langle (3,0) \rangle = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0)\}$, $\langle (1,1) \rangle = \langle (3,1) \rangle = \{(0,0), (1,1), (2,0), (3,1)\}$, $\langle (0,1), (2,0) \rangle = \langle (0,1), (2,1) \rangle = \{(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)\}$. (c) $H = \{(0,0), (1,1), (2,0), (3,1)\}$, $(0,1) + H = \{(0,1), (1,0), (2,1), (3,0)\}$.

24. $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$, $|0| = 1$, $|1| = 3$, $|2| = 3$; $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$, $|0| = 1$, $|1| = 4$, $|2| = 2$, $|3| = 4$; $U(9) = \{1,2,4,5,7,8\}$, $|1| = 1$, $|2| = 6$, $|4| = 3$, $|5| = 6$, $|7| = 3$, $|8| = 2$;
$\forall (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times U(9)$ imamo $12 = |(g_1, g_2, g_3)| = \mathrm{lcm}(|g_1|, |g_2|, |g_3|)$ če in samo če $(|g_1|, |g_2|, |g_3|) \in \{(1,4,3), (1,4,6), (3,4,1), (3,4,2), (3,4,3), (3,4,6)\}$... 32 elementa

25. (a.) Vsi desni odseki podgrupe H v grupi $U(20)$ so $\{1,9\}$, $\{3,7\}$, $\{11,19\}$ in $\{13,17\}$. (b.) $U(20)/H = \{1H, 3H, 11H, 13H\}$.

$\cdot$	$1H$	$3H$	$11H$	$13H$
$1H$	$1H$	$3H$	$11H$	$13H$
$3H$	$3H$	$1H$	$13H$	$11H$
$11H$	$11H$	$13H$	$1H$	$3H$
$13H$	$13H$	$11H$	$3H$	$1H$

(c.) Vse podgrupe grupe $U(20)/H$ so $\{1H\}$, $\{1H, 3H\}$, $\{1H, 11H\}$, $\{1H, 13H\}$ in $U(20)/H$.

26.

$\cdot$	H	$8H$	$18H$	$27H$
H	H	$8H$	$18H$	$27H$
$8H$	$8H$	$27H$	H	$18H$
$18H$	$18H$	H	$27H$	$8H$
$27H$	$27H$	$18H$	$8H$	H

; (b) $|8\langle 16 \rangle| = 4$.

27. Obstaja 6 različnih homomorfizema, $\phi : G \to \mathbb{Z}_6$, $2^k \to ka$ za $a \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

28. $\phi_1(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}_9$; $\quad \phi_2(x) = 2x \bmod 3$, $\forall x \in \mathbb{Z}_9$.

29. (a) $\{1\}$, $\{1,9\}$ in $U(10)$. (b) $Z(U(10)) = U(10)$. (c) Obstajajo 4 homomorfizma. $\phi : U(10) \longrightarrow \mathbb{Z}_8$, $\phi(3^k) = ka$, kje je $a \in \{0,2,4,6\}$.

30. Homomorfizmi so

x	0	1	2	3
$\varphi_1(x)$	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
$\varphi_2(x)$	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
$\varphi_3(x)$	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(1,0)
$\varphi_4(x)$	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)

31. Če je $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definirana z $\phi(a,b) = 7a - 2b$ potem je ϕ homomorfizem, $\phi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ in $\ker\phi = \langle (2,7) \rangle$...

32. (a.) $0 * (x,y) = (x,y)$, $(r+s)*(x,y) = r*(s*(x,y))$. (b.) $G_T = \{(x+ry, y) : r \in \mathbb{R}\}$, premica skozi točko T vzporedna s x-osjo. (c.) $G_T = \{0\}$. (d.) $5 + G_H = \{5\}$.

33. $G1 = G2 = G3 = \{1,2,3\}$, $G4 = G5 = \{4,5\}$, $G6 = \{6\}$, $G7 = G8 = \{7,8\}$; $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_5 = \langle (78) \rangle$, $G_6 = G$, $G_7 = G_8 = \langle (123)(45) \rangle$.

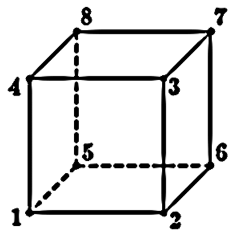
34. $|H| = \frac{1}{3}|Gx||G_x|$, $|H| \le |Hx||G_x|$. Delovanje podgrupe H na množici X ima lahko od 6 do 18 orbit.

35. (a) $X = \square ABCD$, $G = D_4$, $Gx = \{A,B,C,D\}$, $G_x = \{R_0, D'\}$. (b) $Gx = \{1,2,3,4\} = X$, $G_x = \{id, (123), (132)\}$. (c) $Gx = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)^\top\}$,
$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}(1-t) \\ 2-2s & s \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R},\ s+t-1 \neq 0 \right\}$.

36. $G = D_3 = \{id, \rho, \rho^2, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2\}$, $GA = \{A,B,C\} = X$, $G_A = \{id, \sigma\}$, $G_B = \{id, \sigma\rho\}$, $G_C = \{id, \sigma\rho^2\}$.

37. $G = D_5$, $H = \{(1), (25)(34)\}$, $\alpha = (14)(23)$, $G1 = \{1,2,3,4,5\}$, $\beta = (25)(34)$, $H2 = \{2,5\}$, $H_2 = \{(1)\}$...

38. Če so $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ogljišč kocke potem



$$\mathcal{O}_1 = \{(1), (254)(368), (245)(386), (25)(38), (36)(45), (24)(68)\}.$$

Če so $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ogljišč kocke potem $|\mathcal{O}| = |\mathcal{O}v_1| \cdot |\mathcal{O}_{v_1}| = 8|\mathcal{O}_{v_1}|$, $|\mathcal{O}_{v_1}| = |\mathcal{O}_{v_1}v_2| \cdot |\mathcal{O}_{v_1v_2}| = 3|\mathcal{O}_{v_1v_2}|$, $|\mathcal{O}_{v_1v_2}| = |\mathcal{O}_{v_1v_2}v_4| \cdot |\mathcal{O}_{v_1v_2v_4}| = 2|\mathcal{O}_{v_1v_2v_4}|$,...

39. (a.) Vse edinke grupe G so $\{1\}$, $\{1,-1\}$, $\{1,-1,i,-i\}$, $\{1,-1,j,-j\}$, $\{1,-1,k,-k\}$ in $\{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$. (b.) $Z(G) = \{1,-1\}$. (c.) $N(j) = \{1,-1,j,-j\}$, $N(-k) = \{1,-1,k,-k\}$.

40. (a.) $\langle 1 \rangle = \{1\}$, $\langle a \rangle = \{1,a,e,f\}$, $\langle e \rangle = \{1,e\}$, $\langle f \rangle = \{1,a,e,f\}$, $\langle b \rangle = \langle c \rangle = \langle d \rangle = \langle g \rangle = G$. (b.) $|1| = 1$, $|e| = 2$, $|a| = |f| = 4$, $|b| = |c| = |d| = |g| = 8$. (c.) $Z(G) = G$. (d.) $N(a) = N(g) = G$.

41. $D_{10} = \{R_0, R_{36}, R_{36}^2, R_{36}^3, R_{36}^4, R_{36}^5, R_{36}^6, R_{36}^7, R_{36}^8, R_{36}^9, F, R_{36}F, R_{36}^2F, R_{36}^3F, R_{36}^4F, R_{36}^5F, R_{36}^6F, R_{36}^7F, R_{36}^8F, R_{36}^9F, \}$, $|D_{10}| = 20$. Vse Sylowe 2-podgrupe grupe D_{10} so $\{R_0, R_{36}^5, F, R_{36}^5F\}$, $\{R_0, R_{36}^5, R_{36}F, R_{36}^6F\}$, $\{R_0, R_{36}^2F, F, R_{36}^7F\}$, $\{R_0, R_{36}^3F, F, R_{36}^8F\}$ in $\{R_0, R_{36}^4F, F, R_{36}^9F\}$.

42. $992 = 2^5 \cdot 31$, $n_2 \in \{1, 31\}$, $n_{31} \in \{1, 2^5\}$...

43. Sylowe 2-podgrupe grupe G so $\{I, A\}$, $\{I, B\}$, $\{I, ABA\}$. Sylowe 3-podgrupe grupe G so $\{I, AB, BA\}$.

44. $|G| = 3087 = 3^2 \cdot 7^3$; $1 + 3m$ deli $|G|$ za $m \in \{0, 2, 16, 114\}$;... $1 + 7m$ deli $|G|$ za $m = 0$;...

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`